# MA2115 Clase 3: Series de términos positivos. Criterios de convergencia.

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

## 1 Series de términos positivos

La característica fundamental de una serie cuyos términos son todos positivos es que su sucesión de sumas parciales siempre es no decreciente, con lo cual es suficiente con demostrar que dicha sucesión es acotada para establecer la convergencia de la serie.

**Teorema 1** *Una serie de términos positivos es convergente si, y sólo si, su sucesión de sumas parciales es acotada superiormente. En este caso, la suma de la serie es una cota superior de la sucesión de sumas parciales.*

**Demostración:** Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie tal que $a_n \geq 0$, para cada $n \geq 1$, y supongamos que la sucesión de suma parciales $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada superiormente. Como $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n$, ya que $a_{n+1} \geq 0$, de donde la sucesión $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ es también no-decreciente. En virtud de la Proposición 1 de la clase 1, tenemos que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ converge. $\square$

**Ejemplo 1** *Demuestre que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *es convergente.*

**Solución:** Veamos que su sucesión de sumas parciales es acotada. En efecto, para cada $k \geq 1$, $k! \geq 2^{k-1}$, con lo cual $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ y ahora sumando estas desigualdades para $k$ variando de 1 hasta $n$, tenemos que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < 2,$$

con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty} s_n \leq 2$. $\square$

**Definicion 1** *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones cualesquiera. Decimos que $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es un reordenamiento o permutación de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, si existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $a_{\pi(n)} = b_n$, para todo $n \geq 1$. En este caso, también decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es un reordenamiento o permutación de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Departamento de Matemáticas

Es claro que la relación "ser una permutación de" es una relación de equivalencia, es decir, se cumplen las tres condiciones siguientes:

**Es reflexiva:** Toda serie es una permutación de si misma. (porque la idendidad $I\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es una biyección).

**Es simétrica:** Si $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una permutación de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una permutación de $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ (porque la función inversa $\pi^{-1}$ existe y es biyectiva, siempre que $\pi$ es biyectiva).

**Es transitiva:** Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una permutación de $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ es una permutación de $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, entonces $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una permutación de $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ (porque la composición de funciones biyectivas es biyectiva).

**Teorema 2** *Una serie de términos positivos converge si, y sólo si, cada uno de sus reordenamientos converge. En este caso, todas las series en cuestión convergen al mismo valor.*

**Demostración:** Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos convergente. Entonces,en virtud del teorema 1, la suma $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ existe y $s_n\le S$, para cada $n\ge 1$. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ algún reordenamiento de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Para cada $k\ge 1$, los términos $b_1,b_2,\ldots,b_k$ son también términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, con lo cual existe un entero $m(k)\ge k$ tal que los términos $b_1,b_2,\ldots,b_k$ aparecen en la lista $a_1,a_2,\ldots,a_{m(k)}$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{k} b_j \le \sum_{j=1}^{m(k)} a_j = s_{m(k)} \le S,$$

es decir, la sucesión de sumas parciales de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ está acotada superiormente por $S$. Como, además, los términos de $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ son positivos, tenemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge y su suma es menor o igual que $S$. Este argumento funciona en sentido contrario para demostrar que también la suma de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es mayor o igual que $S$ y, por lo tanto, $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. $\square$

**Corolario 1** *Una serie de términos positivos converge si, y sólo si, cada una de sus subseries converge.*

**Demostración:** Procedemos por reducción al absurdo. Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que existe una subsucesión $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ diverge. Entonces, en virtud del teorema 1, las sumas parciales de $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ no tiene una cota superior o, equivalentemente, ningún entero es una cota superior de dicha sucesión. Por lo tanto, para cada entero $l\ge 1$, existe un entero $m(l)>0$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{m(l)} a_{n_k}\ge l$. Como los términos de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ son positivos, entonces $\sum\limits_{k=1}^{n_{m_l}} a_k \ge \sum\limits_{k=1}^{m(l)} a_{n_k}\ge l$, con lo cual la sucesión de sumas parciales de $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ no es acotada superiormente y, en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Esta contradicción viene de suponer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene una subserie divergente. $\square$

## 2 El Criterio de comparación

**Teorema 3 (Criterio de comparación)** *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones tales que $0 \leq a_n \leq b_n$, para cada $n \geq 1$. Entonces, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge siempre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge o, equivalentemente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge siempre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.*

**Demostración:** Observemos que ambas series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tienen términos no negativos y, en consecuencia, son convergentes si, y sólo si, sus sucesiones de sumas parciales respectivas son acotadas superiormente. Para esto, supongamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente. Entonces, existe una cota superior $C > 0$ de su sucesión de sumas parciales, es decir, $\sum_{j=1}^{n} b_j \leq C$. Como $a_j \leq b_j$, para cada $n \geq 1$, tenemos que $\sum_{j=1}^{n} a_j \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq C$, para cada $n \geq 1$, con lo cual la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge. $\square$

**Ejemplo 2** *Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n+1}$ converge.*

**Solución:** En efecto, observemos que $0 \leq \frac{2}{5^n+1} \leq \frac{2}{5^n}$, para cada $n \geq 1$, y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n}$ es convergente, ya que es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{5} < 1$, $\left(\text{de hecho } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n} = \frac{2}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{2}\right)$. Por lo tanto, usando el criterio de comparación, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5^n+1}$ también converge. $\square$

**Ejemplo 3** *Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$ diverge.*

**Solución:** En efecto, por una parte, como $\ln(n+2) \geq 1$, para cada $n \geq 1$, tenemos que $\frac{\ln(n+2)}{n} \geq \frac{1}{n}$, para cada $n \geq 1$, y por otra parte, hemos visto que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Por lo tanto, en virtud del criterio de comparación, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n}$ diverge. $\square$

**Teorema 4 (Criterio de comparación usando límites)** *Sean $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de términos positivos. Supongamos que $C = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe. Tenemos lo siguiente:*

**i)** *Si $0 < C < \infty$, entonces la series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergen ó divergen simultáneamente;*

**ii)** *Si $C = 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge siempre que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, y*

**iii)** *Si $C = \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge siempre que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.*

**Demostración:** Para demostrar **i)**, supongamos que $0 < C < \infty$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un entero $N > 0$ tal que $\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \varepsilon$, siempre que $n \geq N$. Como

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon \Longleftrightarrow (C-\varepsilon)b_n < a_n < (C+\varepsilon)b_n,$$

tenemos que $(C-\varepsilon)b_n < a_n < (C+\varepsilon)b_n$, para cada $n \geq N+1$, de modo que el criterio de comparación nos dice ahora que $\sum_{N+1}^{\infty} a_n$ converge si, y sólo si, $\sum_{N+1}^{\infty} b_n$ converge. Esto es equivalente al enunciado, ya que dos series que sólo difieren en una cantidad finita de términos convergen o divergen simultáneamente (ver el Teorema 4 de la clase 2). Las demostraciones de **ii)** y **iii)** son parecidas y se dejan como ejercicio para el alumno. $\square$

**Ejemplo 4** *Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{n^4+\sqrt{n}}$ converge.*

**Solución:** Observemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n^2+n}{n^4+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n^2+n)n(n+1)}{n^4+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^4+3n^3+n^2}{n^4+\sqrt{n}} = 2.$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, también lo hace $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+n}{n^4+\sqrt{n}}$. $\square$

## 3 El criterio de la integral

Sea $f$ una función que es continua, decreciente y positiva sobre $[1,\infty)$. Entonces, $f$ es integrable en cada intervalo $[1,n]$, para cada entero $n > 1$, y la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ se puede definir como el límite $\lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx$. Si dicho límite existe y es finito, decimos que la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge



Departamento de Matemáticas

y, en otro caso, decimos que diverge. Este tipo de integrales impropias están relacionadas con las series en la forma siguiente: podemos estimar el área bajo la gráfica de $f(x)$ para $x$ entre los enteros $n$ y $n+1$, mediante los rectangulos de base $[n, n+1]$, con alturas $f(n)$ y $f(n+1)$, respectivamente (observemos que $f(n) \geq f(n+1)$, ya que $f$ es decreciente), como lo muestra la figura siguiente:

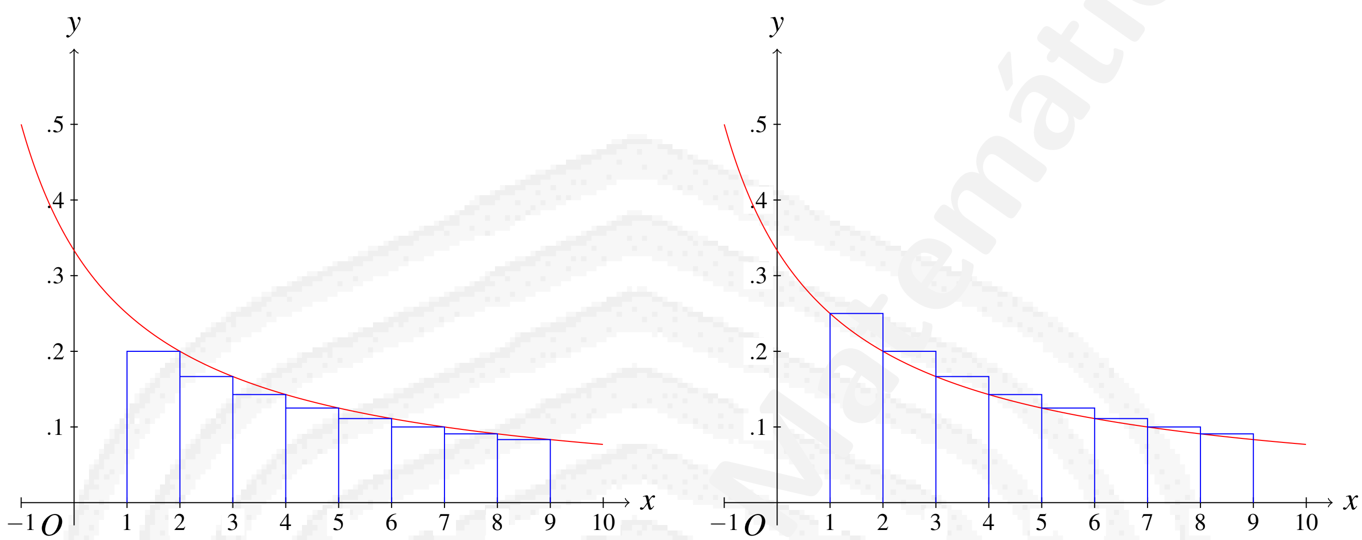


Figura 1: Estimación del área bajo la gráfica de $f$.

A partir de esto, es claro, al menos intuitivamente, que las sumas parciales de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ son asintóticamente equivalentes a las integrales $\int_1^n f(x)dx$, en el sentido que sus límites convergen o divergen simultáneamente. Este es el contenido del siguiente:

**Teorema 5 (Criterio de la integral)** *Sea $f$ una función que es continua, decreciente y positiva sobre $[1, \infty)$ y sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $a_n = f(n)$, para cada entero $n \geq 1$. Entonces, la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge si, y sólo si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.*

**Demostración:** Como $f$ es decreciente y positiva, tenemos que, para cada entero $k \geq 2$, $f(k) \leq f(x) \leq f(k-1)$, para todo $x \in [k-1, k]$, es decir, $a_k \leq f(x) \leq a_{k-1}$, para todo $x \in [k-1, k]$, y, en consecuencia,

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(x)\, dx \leq \sum_{k=2}^{n} a_{k-1}$$

o, equivalentemente,

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^n f(x)\, dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} a_k. \tag{1}$$

Ahora bien, como $\sum_{k=2}^{n} a_k$ y $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ son claramente no-decrecientes, tenemos que tales sucesiones convergen

Departamento de Matemáticas

si, y sólo si, son acotadas. Más aún, las desigualdades (1) nos dicen que $\sum_{k=2}^{n} a_k$ es acotada si, y sólo si, $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$ lo es, con lo cual ambas sucesiones convergen o divergen simultáneamente. $\square$

**Ejemplo 5** *Demuestre que* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p}$ *diverge si* $p \leq 1$ *y converge si* $p > 1$.

**Solución:** Si $p \leq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$, con lo cual la serie diverge. Supongamos entonces que $p > 0$. Entonces, la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ es continua, decreciente y positiva en $[1, \infty)$, y el Criterio de la integral nos dice que la serie $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p}$ converge si, y sólo si, lo hace la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$. Dejamos como ejercicio para el estudiante completar la demostración, mostrando que la integral impropia $\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$ converge si $p > 1$ $\left(\text{de hecho converge a } \frac{1}{1-p}\right)$, y diverge si $p \leq 1$. $\square$

**Ejemplo 6** *Demuestre que la serie* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ *converge para* $p > 1$ *y diverge para* $0 < p \leq 1$.

**Solución:** Para cada $p > 0$, la función $\frac{1}{x(\ln x)^p}$ es continua, decreciente y positiva sobre $[1, \infty)$. Por lo tanto, el criterio de la integral nos dice que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ converge si, y sólo si, la integral impropia $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx$ converge. Por otra parte, haciendo en cambio de variable $u = \ln x$, $du = \frac{dx}{x}$, tenemos que

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^p}\, dx = \int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} \ln u + C & \text{si} \quad p = 1, \\ \frac{u^{1-p}}{1-p} + C & \text{si} \quad p \neq 1, \end{cases} = \begin{cases} \ln(\ln x) + C & \text{si} \quad p = 1, \\ \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} + C & \text{si} \quad p \neq 1. \end{cases}$$

Ahora bien, para $p = 1$, tenemos que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)} = \lim_{m\to\infty} \int_2^m \frac{dx}{x(\ln x)} = \lim_{m\to\infty} [\ln(\ln x)]_{x=2}^m = \lim_{m\to\infty} [\ln(\ln m) - \ln(\ln 2)] = \infty.$$

Para $p \neq 1$, tenemos que

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{m\to\infty} \int_2^m \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p}\right]_{x=2}^m = \lim_{m\to\infty} \left[\frac{(\ln m)^{1-p}}{1-p} - \frac{(\ln 2)^{1-p}}{1-p}\right],$$

si $p < 1$ entonces $1 - p > 0$, con lo cual $\lim_{m\to\infty} \frac{(\ln m)^{1-p}}{1-p} = \infty$, mientras que, si $p > 1$ entonces $1 - p < 0$, de donde $\lim_{m\to\infty} \frac{(\ln m)^{1-p}}{1-p} = 0$. En suma, la serie $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ converge a $\frac{(\ln 2)^{1-p}}{p-1}$ si $p > 1$, y diverge en otro caso. $\square$



Departamento de Matemáticas

# 4 Los criterios del cociente y la raíz

Ahora pasamos a discutir dos criterios basados en la comparación con series geométricas.

Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{r^{n-1}} = C$, con $0 < C < \infty$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{r^n} \frac{r^{n-1}}{a_n} r = r \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{r^n} \lim_{n\to\infty} \frac{r^{n-1}}{a_n} = r\frac{C}{C} = r.$$

Es decir, si una sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se comporta como una serie geométrica, podemos determinar la razón de dicha serie geométrica mediante el límite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Esta idea nos proporciona el siguiente:

**Teorema 6 (Criterio del cociente)** *Si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie de términos positivos y el límite* $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *existe, entonces* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge siempre que* $R < 1$ *y diverge siempre que* $R > 1$.

**Demostración:** Supongamos que $0 < R < \infty$. Entonces

$$1 = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{R^n} \lim_{n\to\infty} \frac{R^{n-1}}{a_n} = \left( \lim_{n\to\infty} \frac{R^{n-1}}{a_n} \right)^2,$$

con lo cual $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{R^{n-1}}{a_n} = 1$ y, en consecuencia, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ se comporta como la serie geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} R^{n-1}$, es decir, converge siempre que $R < 1$ y diverge siempre que $R \geq 1$. Los casos $R = 0$ y $R = \infty$ son más sencillos y se dejan como ejercicios para el estudiante (por ejemplo, puede comparar la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ con las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}$, respectivamente). □

**Ejemplo 7** *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{n!}$ *converge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{\dfrac{n^3}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{n^3 (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Otra forma de "recuperar la razón" a partir de la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, mediante el uso de un límite, es la siguiente: si $C = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{r^n}$ existe y $0 < C < \infty$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{r^n} r^n} = r \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a_n}{r^n}} = rC^0 = r.$$

A partir de esta idea obtenemos el siguiente:

Departamento de Matemáticas

**Teorema 7 (Criterio de la raíz)** *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tales que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = R$ *existe. Entonces,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge siempre que* $R < 1$ *y diverge siempre que* $R > 1$.

**Ejemplo 8** *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ *converge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

.

Correcciones y gráficos: Boris Iskra

May 13, 2008



Departamento de Matemáticas